CAPES externe 1995 de Mathématiques première composition

solution proposée par Antoine Delcroix

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] version du 9 novembre 2002

© 2002, A. Delcroix. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

IUFM ANTILLES GUYANE
PLC1 - Mathématiques

CAPES EXTERNE 1995-PREMIERE EPREUVE

Une proposition de CORRIGE

I. LA MOYENNE ARITHMETICO-GEOMETRIQUE

I.1. Convergence des suites (a_n) et (b_n).

I.1.1. Par construction, les suites (a_n) et (b_n) sont clairement à termes positifs. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$2a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} = \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \right)^2 \geq 0.$$

D'où, en particulier, l'équivalence

$$n \quad \mathbb{N} \quad a_{n+1} - b_{n+1} = 0 \qquad a_n = b_n$$

Lorsque $a_0 = a = b = b_0$, une récurrence immédiate montre alors que, pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$, $b_n < a_n$. Pour $a = b$, on en déduit

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad b_n = \sqrt{b_n^2} \leq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1} < a_{n+1} = (1\ \ 2)(a_n + b_n) < a_n \tag{1}$$

Comme $-b_{n+1} \leq -b_n$, pour $n \geq 1$, il vient

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n + b_n)\ \ 2 - b_{n+1} \leq (a_n + b_n)\ \ 2 - b_n \leq (a_n - b_n)\ \ 2$$

Remarques.
1. l'inégalité est large comme le montre le contre-exemple $a > 0$ et $b = 0$, où la suite (b_n) est nulle et la suite (a_n) vérifie $a_{n+1} = (1\ \ 2)a_n$.
2. On a, pour tout $n \quad \mathbb{N}$, l'inégalité $a_{n+1} - b_{n+1} \leq (1\ \ 2)\ \ a_n - b_n$.

Notons enfin que si $a = b$ les suites (a_n) et (b_n) sont constantes, comme relevé ci-dessus.

I.1.2. Les suites (a_n) et (b_n) sont *adjacentes* c'est-à-dire que (a_n) est décroissante, (b_n) croissante et que l'on a les deux propriétés

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad b_n \leq a_n \qquad \lim_n (a_n - b_n) = 0$$

La dernière propriété résulte de l'inégalité

$$n \quad \mathbb{N} \qquad 0 \leq a_n - b_n \leq (1\ \ 2)^n\ \ a - b \tag{2}$$

établie par récurrence (attention à la valeur absolue !).
Les suites (a_n) et (b_n) sont donc convergentes et convergent vers la même limite. On a de plus

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad b_n \leq M(a\ \ b) \leq a_n \tag{3}$$

Remarque : autre méthode.- On peut redémontrer le résultat sur les suites adjacentes dans ce cas particulier : on remarque que (a_n) est décroissante et minorée par b_1 donc convergente (de limite $a \quad$) et que (b_n) est croissante et majorée par a_1 donc convergente (de limite $b \quad$). L'inégalité $a_{n+1} - b_{n+1} \leq (1\ \ 2)(a_n - b_n)$ entraine alors, par prolongement, $a \quad - b \quad \leq (1\ \ 2)(a \quad - b \quad)$ d'où $a \quad = b$

I.2. Propriétés des moyennes arithmético-géométrique

A. Une suite convergente (c_n) possède la même limite que toute suite obtenue à partir de (c_n) en supprimant un nombre fini de termes : ceci entraine, pour tout entier n, l'égalité $M(a_n\ \ b_n) = M(a\ \ b)$.
B. Les suites relatives aux couples $(a\ \ b)$ et au couple $(b\ \ a)$ ne différent que par leur premier terme, ce que montre la relation de récurrence entre a_{n+1} (*resp.* b_{n+1}) et a_n (*resp.* b_n) symétrique en a_n et b_n. D'où l'égalité $M(a\ \ b) = M(a\ \ b)$.
C. Pour tout réel $\lambda \geq 0$, la suite relative au couple $(\lambda a\ \ \lambda b)$ s'obtient en multipliant par λ les termes de la suite relative au couple $(a\ \ b)$. D'où l'égalité $M(\lambda a\ \ \lambda b) = \lambda M(a\ \ b)$. On a donc en particulier, pour $a > 0 \quad M(a\ \ b) = aM(1\ \ b\ \ a) = af(b\ \ a)$

I.3. Continuité de la fonction f

I.3.1. On raisonne par récurrence. Par définition

$$x \quad \mathbb{R}_+ \qquad u_0(x) = 1 \qquad v_0(x) = x$$

Les fonctions u_0 et v_0 sont donc continues. Supposons que, pour $n \geq 0$, u_n et v_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Comme la somme (*resp.* le produit) de deux fonctions continues sont continues et que la fonction $x \qquad \overline{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $u_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n + v_n)$ et $u_{n+1} = \quad \overline{u_n v_n}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

I.3.2. L'inégalité (2) entraine immédiatement, pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$

$$x \quad \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq u_n(x) - v_n(x) \leq (1\ \ 2)^n\ \ u_0(x) - v_0(x)\ = (1\ \ 2)^n\ \ 1 - x \tag{4}$$

La double inégalité (3), appliquée pour $a = x$ et $b = 1$, entraine $0 \leq u_n - f \leq u_n - v_n$. On dispose donc de la majoration

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad x \quad \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq u_n(x) - f(x) \leq (1\ \ 2)^n\ \ 1 - x$$

I.3.3. Soit A un réel strictement positif. La majoration précédente entraine

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad x \quad [0\ \ A] \quad 0 \leq u_n(x) - f(x) \leq (1\ \ 2)^n\,(1 + A)$$

La suite (u_n) converge donc uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[0\ \ A]$. Comme chaque fonction (u_n) est continue sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte que f est continue sur $[0\ \ A]$. Comme A est quelconque, la fonction f est continue sur la réunion $\quad_{A\ \ \mathbb{R}_+^*}[0\ \ A]$ qui est égale à $\mathbb{R}_+$.

I.4. Etude de la fonction f au voisinage de 1

L'inégalité (3), appliquée pour $n = 1$, donne

$$x \quad \mathbb{R}_+ \qquad \overline{x} \leq f(x) \leq (1\ \ 2)\,(1 + x) \tag{5}$$

On remarque ensuite que $f(1) = M(1\ \ 1) = 1$. D'où,

$$\begin{array}{cc} x \quad]1\ + \quad [& (\quad \overline{x} - 1)\ \ (x-1) \leq (f(x) - 1)\ \ (x-1) \leq 1\ \ 2 \\ x \quad]0\ \ 1[& (\quad \overline{x} - 1)\ \ (x-1) \geq (f(x) - 1)\ \ (x-1) \geq 1\ \ 2 \end{array}$$

Comme $(\quad \overline{x} - 1)\ \ (x-1) = 1\ \ (\quad \overline{x} + 1)$, il vient

$$\lim_{x \quad 1^-} (f(x) - 1)\ \ (x-1) = 1\ \ 2 = \lim_{x \quad 1^+} (f(x) - 1)\ \ (x-1)$$

D'où la dérivabilité de f en 1 et $f\ (1) = 1\ \ 2$.

I.5. Etude aux bornes de la fonction f

I.5.1. On a $f(0) = M(1\ \ 0) = 0$, d'après une remarque ci-dessus (*cf* I.1.1.). On a, selon l'inégalité (5), pour tout $x > 0$, l'inégalité $1 \quad \overline{x} \leq f(x)\ \ x$. Ceci entraine que $\lim_{x \quad 0^+} f(x)\ \ x = +\quad$: la fonction f n'est donc pas dérivable à droite en 0 et le graphe de f possède une tangente verticale au point $(0\ \ 0)$.

I.5.2. On a pour tout $x > 0$, $f(x) = M(1\ \ x) = xM(1\ \ x\ \ 1) = xM(1\ \ 1\ \ x) = xf(1\ \ x)$, en utilisant les propriétés de la moyenne arithmético-géométrique démontrées en I.2.

I.5.3. On a, pour tout $x > 0$, $f(x)\ \ x = f(1\ \ x)$, d'après le I.5.2.. Comme f est continue en 0 à droite, on a $\lim_{x \quad 0^+} f(x) = f(0) = 0$ d'où l'on déduit par composition de limites

$$\lim_{x \quad +} f(x)\ \ x = \lim_{x \quad +} f(1\ \ x) = \lim_{y \quad 0^+} f(y) = 0$$

Le graphe de f présente donc une branche parabolique dans la direction Ox.

I.6. Sens de variation de la fonction f

De nouveau, on procède par récurrence : les fonctions u_0 et v_0 sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Supposons que, pour $n \geq 0$, u_n et v_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Comme la somme de deux fonctions croissantes, le produit de deux fonctions *positives* et croissantes sont croissantes et que la fonction $x \qquad \overline{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $u_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n + v_n)$ et $u_{n+1} = \quad \overline{u_n v_n}$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$. On a alors, pour

tout couple de réels $(x\ y)$ tels que $x < y$ et pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$ l'inégalité $v_n(x) \leq v_n(y)$. L'inégalité se prolonge et donne $f(x) \leq f(y)$.

Remarque.- On vient donc de redémontrer qu'une fonction f, limite simple d'une suite de fonctions croissantes (*resp.* décroissante), est croissante (*resp.* décroissante).

I.7. Représentation graphique de la fonction f

I.7.1. Pour calculer les valeurs décimales par défaut à 10^{-5} près $\widetilde{y}$ de $f(x)$, on réalise un programme calculant a_n et b_n avec comme valeurs initiales $a = 1$ et $b = x$ et comme test d'arrêt $a_n - b_n < 10^{-6}$. Alors d'une part $f(x) \quad]b_n\ a_n\ [$ et d'autre part la troncature $\widetilde{y}$ de b_n à la cinquième décimale est le nombre cherché puisque $a_n - \widetilde{y} < 10^{-5}$, comme le montre la majoration

$$f(x) - \widetilde{y} \leq a_n - b_n + b_n - \widetilde{y} < 10^{-6} + 9\ 10^{-6}$$

Un algorithme possible est le suivant (la variable b recueille le résultat final) :

Initialiser $a := 1$ et $b := x$;
Tant que $a - b \geq 10^{-6}$ faire
    $Temp1 := (1\ \ 2)(a + b)$; $Temp2 := \quad \overline{ab}$;
    $a := Temp1$; $b := Temp2$;
Tronquer b à la cinquième décimale;
Afficher b.

Remarque.- De la relation $\quad x > 0,\ f(x) = xf(1\ \ x)$, il vient, en particulier

$$f(10^{-1}) = 10^{-1}f(10) \qquad f(10^{-2}) = 10^{-2}f(10^2)$$

Une valeur approchée de $f(10^{-1})$ (*resp.* $f(10^{-2})$) à 10^{-5} près s'obtient donc en divisant par 10 (*resp.* 100) une valeur approchée de $f(10)$ (*resp.* $f(100)$) à 10^{-5} près. Attention, il est faux à l'inverse qu'en multipliant par 10 une valeur approchée de $f(10^{-1})$ à 10^{-5} près, on obtient une valeur approchée de $f(10^{-1})$ à 10^{-5} près !
Les calculs donnent le tableau de valeurs suivant

$x =$	0 01	0 1	0 2	0 4	0 6	0 8	2	3	10	100
$\widetilde{y} =$	0 26216	0 42504	0 52080	0 66579	0 78724	0 89721	1 45679	1 86361	4 25040	26 21668

I.7.2. On dispose des éléments suivants pour tracer le graphe Γ de f. L'inégalité (5) montre que Γ est compris entre la courbe S d'équation $y = \quad \overline{x}$ $(x \geq 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = (x+1)\ \ 2$ $(x \geq 0)$. De plus, selon le I.4. la droite $\mathcal{D}$ est la tangente à Γ au point $(1\ \ 1)$; la droite $\mathcal{D}$ est aussi la tangente à $\mathcal{S}$ au même point. Enfin, la courbe Γ est tangente à l'axe $0y$ au point $(0\ \ 0)$ et admet une branche parabolique dans la direction Ox.

II EXPRESSION DE $M(a\ b)$ PAR UNE INTEGRALE ELLIPTIQUE

II.1. Convergence et propriétés des intégrales $I(a\ b)$ et $J(a\ b)$

II.1.1. La fonction $\Phi_{a\ b} : t \quad 1\ \sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C $\quad$ sur $\mathbb{R}$, car les réels a et b sont strictement positifs. Cette fonction est de plus paire et l'on a $\Phi_{a\ b}(t) = \bigcirc(1\ \ t^2)$, en $+\quad$. Les intégales $I(a\ b)$ et $J(a\ b)$ sont alors convergentes et de plus

$$\int_0^+ \quad \Phi_{a\ b}(t)\mathrm{d}t = \int_-^0 \quad \Phi_{a\ b}(t)\mathrm{d}t$$

d'où l'égalité $J(a\ b) = 2I(a\ b)$.

II.1.2. La fonction $T_b : \theta \quad b\tan\theta$ est un C $\ $-difféomorphisme de $]-\pi\ \ 2\ \pi\ \ 2[$ dans $\mathbb{R}$ L'existence de l'intégrale $\int_0^{\pi\ \ 2} \Phi_{a\ b}(T_b(\theta))T_b(\theta)\mathrm{d}\theta$ en découle, avec les égalités

$$I(a\ b) = \int_0^{\pi\ \ 2} \frac{b^2(1 + \tan^2\theta)\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(b^2\tan^2\theta + a^2)(b^2\tan^2\theta + b^2)}} = \int_0^{\pi\ \ 2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)}} \tag{6}$$

Cette dernière intégrale est btenue par simplification puis par multiplication des numérateur et dénominateur de l'expression sous le signe intégral par $\cos^2\theta$: ceci est possible, puisque $\cos^2\theta$ est strictement

positif sur $[0\ \pi\ 2[$.

On déduit en particulier que $x \quad \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \int_0^{\pi\ 2} 1\ \sqrt{(\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

La fonction $\Psi : (\theta\ x) \quad 1\ \sqrt{(\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}$ est clairement de classe C^1 sur $[0\ \pi\ 2] \times \mathbb{R}_+^*$. L'intervalle d'intégration étant compact, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.1.3. Soient a, b et λ trois réels strictement positifs. Comme l'expression définissant $I(a\ b)$ est symétrique en a et b, on a $I(a\ b) = I(b\ a)$. L'expression obtenue en II.1.2 pour $I(a\ b)$ montre que $I(\lambda a\ \lambda b) = (1\ \lambda)I(a\ b)$. Enfin, $I(a\ b) = aI(1\ b\ a) = ag(b\ a)$.

II.2. Expression de $M(a\ b)$ en fonction de $I(a\ b)$

II.2.1. La fonction $S : t \quad (1\ 2)(t - ab\ t)$ est de classe C^1 sur $]0\ +\ [$ avec $S\ (t) = (1\ 2)(1 + ab\ t^2)$. Comme S est strictement positive sur $]0\ +\ [$, S est strictement croissante sur $]0\ +\ [$. La fonction S est donc un C^1-difféomorphisme de $]0\ +\ [$ sur $S(]0\ +\ [) =]-\quad +\ [$. Pour tout $(\alpha\ \beta) \quad (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'intégrale $\int_0^+ \Phi_{\alpha\ \beta}(S(t))S\ (t)\mathrm{d}t$ est donc convergente, et égale à $J(\alpha\ \beta) = \int_-^+ \Phi_{\alpha\ \beta}(s))\mathrm{d}s$. On a, pour tout $(a\ b) \quad (\mathbb{R}_+^*)^2$, les égalités

$$J(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = \int_-^+ \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(4s^2 + (a+b)^2)(s^2 + ab)}} = \int_0^+ \frac{2(t^2+ab)\mathrm{d}t}{\sqrt{((t^2-ab)^2 + t^2(a+b)^2)((t^2-ab)^2 + 4t^2ab)}}$$

Or $(t^2 - ab)^2 + t^2(a+b)^2 = (t^2 + a^2)(t^2 + b^2)$ et $(t^2 - ab)^2 + 4t^2ab = (t^2 + ab)^2$. D'où, en remplacant

$$J(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = \int_0^+ \frac{2}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}\mathrm{d}t = 2I(a\ b)$$

Comme $J(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = 2I((\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}))$ d'après le II.1.1., on a, pour tout $(a\ b) \quad (\mathbb{R}_+^*)^2$, $I(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = I(a\ b)$. Par une récurrence facile, il vient enfin, pour tout $n \geq 0$, $I(a_n\ b_n) = I(a\ b)$.

II.2.2. On a, d'après le II.1.3., $I(a_n\ b_n) = (1\ a_n)g(b_n\ a_n)$. Or $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n b_n = M(a\ b)$ et l'application g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$: il vient $\lim\limits_n I(a_n\ b_n) = (1\ M(a\ b))g(1)$. Avec $I(a\ b) = I(a_n\ b_n)$ et $g(1) = \int_0^{\pi\ 2}\mathrm{d}\theta = \pi\ 2$, on obtient

$$I(a\ b) = \pi\ (2M(a\ b)).$$

Comme, pour tout $x \quad \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = M(1\ x)$ et $g(x) = I(1\ x)$ est strictement positif, il vient $f(x) = \pi\ (2g(x))$. La fonction g étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est de même de f.

II.3. Comportement asymptotique des fonctions f et g

II.3.1. L'application $s \quad x\ s$ est un C^1-difféomorphisme décroissant de $]0 \quad \overline{x}[$ dans $]\ \overline{x}\ +\ [$. Ceci permet d'effectuer ce changement de variable dans la première intégrale ci-dessous et d'obtenir l'égalité

$$\int_0^{\overline{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = -\int_+^{\overline{x}} \frac{x\mathrm{d}s}{\sqrt{(x^2+s^2)(x^2+x^2s^2)}} = \int_{\overline{x}}^+ \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(x^2+s^2)(s^2+1)}}$$

On en déduit immédiatement que $g(x) = I(1\ x) = \int_0^+ \Phi_{x\ 1}(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\overline{x}} \Phi_{x\ 1}(t)\mathrm{d}t$.

II.3.2. On a pour tout $x > 0$

$$h(x) - g(x) = \int_0^{\overline{x}} \frac{2}{\sqrt{(t^2+x^2}}(1 - \frac{1}{\overline{t^2+1}})\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \quad [0 \quad \overline{x}]$, on a $1 \quad \overline{x+1} \leq 1 \quad \overline{t^2+1} \leq 1$. D'où, pour tout $x \quad \mathbb{R}_+^*$

$$0 \leq h(x) - g(x) \leq \int_0^{\overline{x}} \frac{2}{\overline{t^2+x^2}}(1 - \frac{1}{\overline{x+1}})\mathrm{d}t = h(x)\left(1 - 1 \quad \overline{x+1}\right)$$

Comme $\lim_{x \quad 0+}\left(1 - 1 \quad \overline{x+1}\right) = 0$, on a bien $h - g = \mathrm{o}(h)$, en zéro à droite. D'où l'équivalence $g \sim h$ en zéro à droite.

II.3.3. On a, pour tout $x > 0$ $h(x) = \int_0^{\overline{x}} 2 \quad \overline{t^2 + x^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \quad {}^{\overline{x}} 2 \quad \overline{t^2+1}\mathrm{d}t$. D'où

$$x \quad \mathbb{R}_+^* \qquad h(x) = \Big[2\ln(t + \sqrt{t^2+1})\Big]_0^1 \quad {}^{\overline{x}} = -\ln x + 2\ln(1 + \quad \overline{1+x})$$

On obtient facilement $\lim_{x \quad 0+} h(x) \ (-\ln x) = 1$ D'où l'équivalence $h(x) \sim -\ln x$ en zéro, à droite. Donc, par transitivité de l'équivalence, $g(x) \sim -\ln x$ en zéro à droite.

II.3.4. Avec l'égalité $f(x) = \pi \ (2g(x))$, pour tout $x > 0$, établie en II.2.2., il vient en appliquant directement II.3.3.

$$f(x) \sim -\pi \ (2\ln x) \ \text{(en zéro, à droite).}$$

On en déduit $f(1 \ x) \sim \pi \ (2\ln x)$ en $+ \quad$. Comme, pour tout $x > 0$, $f(x) = xf(1 \ x)$ il vient enfin l'équivalence

$$f(x) \sim (\pi \ 2)(x \ \ln x) \quad \text{en} +$$

III EXPRESSION DE π EN FONCTION DE f ET f

Pour $x \quad]0 \ 1[$, on a $v_0(x) = x < u_0(x) = 1$. Puis, pour $n \geq 1$, d'après la question I.1.1., on a $0 \leq v_n(x) < u_n(x)$, pour tout $x \quad]0 \ 1[$. Ceci justifie l'existence de w_n et l'inégalité

$$x \quad]0 \ 1[\quad w_n(x) > 0$$

Comme par ailleurs, pour tout $n \quad \mathbb{N}$ et tout $x \quad]0 \ 1[$, on a $0 < u_n(x)$, l'existence de k_n est assurée.

III.1. Convergence de la suite des fonctions k_n

III.1.1. Rappelons les relations de récurrence définissant les suites (u_n) et (v_n)

$$u_{n+1} = (1 \ 2)(u_n + v_n) \qquad v_{n+1} = \quad \overline{u_n v_n} \tag{7}$$

On a pour tout $n \geq 0$ $w_{n+1}^2 = u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(u_n^2 + v_n^2) - \frac{1}{2}u_n v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2$ D'où

$$n \quad \mathbb{N} \quad w_{n+1} = (1 \ 2)(u_n - v_n) \tag{8}$$

Remarquons que, pour tout $n \geq 0$ $w_n^2 = u_n^2 - v_n^2 = (u_n - v_n)(u_n + v_n) = 4w_{n+1}u_{n+1}$. On obtient finalement en combinant les relations 7 et 8

$$n \quad \mathbb{N} \quad w_n = 2 \ \overline{w_{n+1}u_{n+1}} \qquad u_{n+1} + w_{n+1} = u_n$$

On a alors, pour tout $n \geq 0$

$$M(u_n \ w_n) = M(u_{n+1} + w_{n+1} \ 2 \ \overline{w_{n+1}u_{n+1}}) = 2M(\frac{u_{n+1} + w_{n+1}}{2} \quad \overline{w_{n+1}u_{n+1}}) = 2M(u_{n+1} \ w_{n+1})$$

en raison des propriétés algébriques de la moyenne arithmético-géométrique.

Une récurrence immédiate montre alors que, pour tout $n \geq 0$, on a $2^n M(u_n \ w_n) = M(u_0 \ w_0)$. Or $u_0 = 1$ et, pour tout $x \quad]0 \ 1[$, $w_0(x) = \quad \overline{1-x^2}$. D'où

$$n \quad \mathbb{N} \quad x \quad]0 \ 1[\ 2^n M(u_n(x) \ w_n(x)) = M(1 \ \sqrt{1-x^2}) = f(\sqrt{1-x^2})$$

III.1.2. Puisque pour tout $n \geq 0$, u_n est à valeurs strictement positives, il vient

$$n \quad \mathbb{N} \quad M(u_n \ w_n) = u_n M(1 \ w_n \ u_n) = u_n f(w_n \ u_n)$$

D'où, pour tout $x \quad]0 \ 1[$ et tout $n \quad \mathbb{N}$, $2^n f(w_n(x) \ u_n(x)) = \big(f(\ \overline{1-x^2})\big) \ u_n(x)$. Comme la suite (u_n) converge vers la fonction f qui est à valeurs strictement positives sur $]0 \ 1[$ (car minorée par v_0 : $x \quad x)$ on obtient l'existence de $\lim_n \quad 2^n f(w_n(x) \ u_n(x))$ et l'égalité $\lim_n \quad 2^n f(w_n(x) \ u_n(x)) = \big(f(\ \overline{1-x^2})\big) \ f(x)$

III.1.3. On a, pour tout $n \quad \mathbb{N}$, $w_n \ u_n = \sqrt{1-(v_n \ u_n)^2}$. Comme les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite f, il vient, pour tout $x \quad]0 \ 1[$, $\lim_n \quad w_n(x) \ u_n(x) = 0$.

Puisque $f(x) \sim -\pi\ (2\ln x)$ en zéro, on a, pour tout $x \quad]0\ 1[$, les équivalences suivantes pour n tendant vers

$$2^n f(w_n(x)\ u_n(x)) \sim -2^{n-1}\pi\ \ln((w_n(x)\ u_n(x)) \sim -\pi\ (2k_n(x)).$$

On en déduit, grâce au III.1.2., que

$$x \quad]0\ 1[\quad \lim_n\ k_n(x) = (\pi f(x)) \Big/ \left(2f(\sqrt{1-x^2})\right)$$

III.2. Convergence de la suite de fonctions dérivées k_n

III.2.1. On va procéder par récurrence, comme aux questions I.3. et I.4. Notons r_c la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par $r_c(x) = \quad \overline{x}$. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On rappelle aussi que l'on a

$$x \quad]0\ 1[\qquad n \quad \mathbb{N} \quad 0 < v_n(x) < u_n(x) \tag{9}$$

A. Comme, pour tout $x \quad]0\ 1[$, $u_0(x) = 1$ et $v_0(x) = x$, les fonctions u_0 et v_0 sont de classe C^1. Supposons que, pour $n \geq 0$, u_n et v_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Comme la somme (*resp.* le produit) de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1 et que la fonction r_c est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $u_{n+1} = (1\ 2)(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = r_c \circ (u_n v_n)$ sont de classe C^1 sur $]0\ 1[$. On utilise, en particulier, le fait que u_{n+1} et v_{n+1} sont à valeurs strictement positives.

B. Notons que

$$x \quad]0\ 1[\quad u_1(x) = (1\ 2)(1+x) \quad v_1(x) = \quad \overline{x}$$

Pour tout $x \quad]0\ 1[$, on a donc $u_1(x) = 1\ 2 > 0$ et $v_1(x) = 1\ (2 \quad \overline{x}) > 0$: les fonctions u_1 et v_1 sont positives et ne s'annulent pas sur $]0\ 1[$. On note alors que

$$n \quad \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = (1\ 2)(u_n + v_n) \qquad v_{n+1} = r_c(u_n v_n)(u_n v_n + u_n v_n)$$

Une récurrence analogue à celle qui précède permet alors de conclure que pour tout $n \geq 1$ u_n et v_n sont positives et ne s'annulent pas sur $]0\ 1[$.

C. Soit $n \quad \mathbb{N}$. Etant donné les inégalités (9), la fonction $u_n^2 - v_n^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $w_n = r_c \circ (u_n^2 - v_n^2)$ est de classe C^1 sur $]0\ 1[$ et à valeurs strictement positives. Comme $k_n = \ln \circ (u_n\ w_n)$ la fonction $k_n$est de classe C^1 sur $]0\ 1[$, comme composée de fonctions de classe C^1.

III.2.2. Soit $n \quad \mathbb{N}$. On a les égalités

$$k_{n+1} = 2^{-n-1}(u_{n+1}\ u_{n+1} - w_{n+1}\ w_{n+1}) = 2^{-n-1}\frac{u_{n+1}w_{n+1} - w_{n+1}u_{n+1}}{u_{n+1}w_{n+1}}$$

En notant que $w_{n+1} = (u_n - v_n)\ 2$, $u_{n+1} = (u_n + v_n)\ 2$ et $w_n = \quad \overline{u_{n+1}w_{n+1}}$, il vient, après simplification

$$k_{n+1} = 2^{-n}(v_n u_n - u_n v_n)\ w_n^2$$

Puisque $w_{n+1}^2 = v_n u_n$, on obtient finalement

$$k_{n+1}\ v_{n+1}^2 = \frac{1}{2^n w_n^2}\left(\frac{v_n}{v_n} - \frac{u_n}{u_n}\right) \tag{10}$$

Par ailleurs, de $k_n = 2^{-n}(u_n\ u_n - w_n\ w_n)$, on tire l'égalité

$$k_n\ v_n^2 = \frac{1}{2^n w_n^2}\left(\frac{w_n^2 u_n}{v_n^2 u_n} - \frac{w_n w_n}{v_n^2}\right)$$

Comme $w_n^2 = u_n^2 - v_n^2$, il vient $w_n w_n = u_n u_n - v_n v_n$ et les égalités

$$k_n\ v_n^2 = \frac{1}{2^n w_n^2}\left(\left(\frac{u_n^2}{v_n^2} - 1\right)\frac{u_n}{u_n} - \frac{u_n u_n - v_n v_n}{v_n^2}\right) = \frac{1}{2^n w_n^2}\left(\frac{v_n}{v_n} - \frac{u_n}{u_n}\right) \tag{11}$$

D'où le résultat, par comparaison des égalités (10) et (11).

III.2.3. Soit $x \quad]0\ 1[$ et $B(x)$ la valeur indépendante de n de $k_n(x)\ v_n^2(x)$. On a en particulier

$$x \quad]0\ 1[\quad B(x) = k_0(x)\ v_0^2(x) = \left(\frac{d}{dx}(-\ln\sqrt{1-x^2})\right)\ x^2 = 1\ (x(1-x^2))$$

On en déduit que, pour tout $x \in]0\ 1[$, $k_n(x) = v_n^2(x)\ (x(1-x^2))$.

III.2.4. Soit K un compact de $]0\ 1[$. Définissons sur $]0\ 1[$, la suite de fonctions (c_n) par

$$n \quad \mathbb{N} \quad c_n(x) = f^2(x)\ (x(1-x^2)) - k_n(x) = [(f^2(x) - v_n^2(x)]\ (x(1-x^2))$$

Comme la suite (v_n) est croissante et formée de fonctions positives, on a clairement $c_n \geq 0$. La fonction $x \quad 1\ (x(1-x^2))$ étant continue sur $]0\ 1[$, elle est bornée sur le compact K : notons M_K sa borne supérieure sur K. On a

$$n \quad \mathbb{N} \quad x \quad K \quad 0 \leq c_n(x) \leq M_K[(f^2(x) - v_n^2(x)]$$

Or, $f^2(x) - v_n^2(x) \leq u_n^2(x) - v_n^2(x) \leq (u_n(x) - v_n(x))(u_n(x) + v_n(x)) \leq 2u_n(x)(u_n(x) - v_n(x))$, selon les propriétés montrées en I.1.1. En utilisant encore les propriétés de (u_n) et (v_n), il vient

$$n \quad \mathbb{N} \quad x \quad K\ \ 0 \leq c_n(x) \leq 2M_K u_0(x)\frac{1}{2^n}\ \ u_0(x) - v_0(x)\ \ \leq 2^{-n+1}M_K$$

Il en résulte la convergence uniforme de la suite (c_n) vers 0 sur K : la suite (k_n) converge donc uniformément sur tout compact de $]0\ 1[$ vers la fonction $x \quad f^2(x)\ (x(1-x^2))$.

III.3. Une expression de π

Pour cette question III.3., notons ψ la fonction définie sur $]0\ 1[$ par $\psi(x) = \pi f(x)\ \ \left(2f(\ \ \overline{1-x^2})\right)$

III.3.1. Soit $[\alpha\ \beta]$ un intervalle inclus dans $]0\ 1[$. D'après le III.1.3., la suite (k_n) converge simplement vers la fonction ψ sur $[\alpha\ \beta]$. D'après le III.2.3., la suite (k_n) converge uniformément sur $[\alpha\ \beta]$ vers la fonction $x \quad f^2(x)\ (x(1-x^2))$. Il en résulte que ψ est dérivable sur $]\alpha\ \beta[$ et de dérivée la fonction précédente. Comme ce résultat est vrai sur tout intervalle $]\alpha\ \beta[$ inclus dans $]0\ 1[$, ψ est dérivable sur $]0\ 1[$ et de dérivée $x \quad f^2(x)\ (x(1-x^2))$.

Remarque. Le texte ne précisant pas sur quel ensemble montrer l'assertion, c'est au candidat de voir que le contexte demande de travailler sur l'intervalle $]0\ 1[$.

III.3.2. Soit $x \quad]0\ 1[$. Un calcul direct donne

$$\psi\ (x) = (\pi\ \ 2)\left(\frac{f\ (x)}{f(\ \ \overline{1-x^2})} + \frac{f(x)f\ (\ \ \overline{1-x^2})}{(f(\ \ \overline{1-x^2}))^2}\frac{x}{\overline{1-x^2}}\right)$$

Le choix de $x = 1 \quad \overline{2}$ (racine de l'équation $x = \ \ \overline{1-x^2}$) donne $\psi\ (1 \quad \overline{2}) = \pi f\ (1 \quad \overline{2})f(1 \quad \overline{2})$. Comme d'autre part $\psi\ (x) = f^2(x)\ \ (x(1-x^2))$, on a $\psi\ (1 \quad \overline{2}) = 2\ \ \overline{2}f^2(1 \quad \overline{2})$. On obtient donc bien

$$\pi = 2\ \ \overline{2}f^3(1 \quad \overline{2})\ \ f(1 \quad \overline{2})$$

IV APPROXIMATION DE π

Dans cette partie, pour toute fonction \quad bornée sur K, nous noterons par $\quad_K$ le nombre $\sup_{x\ \ K}\ \ (x)$. Remarquons aussi que les suites $(y_n)_{n\geq 1}$ et $(z_n)_{n\geq 1}$ sont bien définies puisque, pour tout $x \quad]0\ 1[$ et tout $n \quad \mathbb{N}^*$, on a $v_n(x) > 0$ et $u_n(x) > 0$, d'après le III.2.1..

IV.1. Convergence des suites des fonctions u_n et v_n

IV.1.1. On a, pour tout $x \quad]0\ 1[$ et tout $n \quad \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \geq v_n(x)$ d'où la première assertion ; les majorations suivantes découlent des propriétés démontrées en I.1.1.

$$0 \leq y_n(x) - 1 = \frac{1}{v_n(x)}(u_n(x) - v_n(x)) \leq \frac{1}{v_0(x)}(u_n(x) - v_n(x)) \leq 2^{-n}(1\ \ v_0(x)) \leq 2^{-n}\ \ 1\ \ v_0\ \ _K$$

puisqu'en effet, la fonction $x \quad 1\ \ v_0(x)$ est continue et donc bornée sur le compact K. On déduit immédia- tement de la majoration précédente la convergence uniforme de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ vers 1 sur K.

IV.1.2. On a, pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$,

$$y_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2\ \ \overline{u_n v_n}} = \frac{u_n\ \ v_n + 1}{2\sqrt{u_n\ \ v_n}} = \frac{1 + y_n}{2\ \ \overline{y_n}}$$

Par ailleurs, on a $v_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n v_n + u_n v_n) \quad \overline{u_n v_n} = (1\ \ 2)(u_n\sqrt{v_n\ \ u_n} + v_n\sqrt{u_n\ \ v_n})$. D'où

$$z_{n+1} = \frac{u_n \quad \overline{y_n} + v_n \quad \overline{y_n}}{(u_n + v_n)} = \frac{1 \quad \overline{y_n} + z_n \quad \overline{y_n}}{(1 + z_n)} = \frac{1 + z_n y_n}{(1 + z_n) \quad \overline{y_n}}$$

IV.1.3. *A.* Démontrons par récurrence la propriété $z_n \geq 1$. Selon des calculs effectués dans le III.2.1. on a, pour tout $x \quad]0\ \ 1[$, $u_1(x) = 1\ \ 2$ et $v_1(x) = 1\ \ (2 \quad \overline{x})$ d'où

$$x \quad]0\ \ 1[\qquad v_1(x)\ \ u_1(x) = 1 \qquad \overline{x} > 1$$

On a ensuite, pour tout $n \geq 1$, les équivalences

$$z_{n+1} = \frac{1 + z_n y_n}{(1 + z_n) \quad \overline{y_n}} \geq 1 \qquad 1 + z_n y_n \geq (1 + z_n) \quad \overline{y_n} \qquad z_n \quad \overline{y_n}(\quad \overline{y_n} - 1) \geq \quad \overline{y_n} - 1$$

Or $\quad \overline{y_n} \geq 1$, d'après le IV.1.1. Sous l'hypothèse de récurrence $z_n \geq 1$, l'inégalité $z_n \quad \overline{y_n}(\quad \overline{y_n} - 1) \geq \overline{y_n} - 1$ est vraie et donc $z_{n+1} \geq 1$ aussi. La récurrence aboutit.

B. Comme, pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$, $z_n = v_n\ \ u_n$, on a immédiatement $u_n \leq v_n$. D'où

$$n \quad \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n + v_n) \geq u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante.

IV.1.4. *A.* En utilisant le IV.1.2., on a pour tout $n \geq 1$,

$$y_{n+1} \leq z_{n+1} \qquad \frac{1 + y_n}{2} \leq \frac{1 + y_n z_n}{1 + z_n} \qquad (1 + y_n)(1 + z_n) \leq 2(1 + y_n z_n) \qquad y_n - 1 \leq z_n(y_n - 1)$$

Or $y_n \geq 1$ et $z_n \geq 1$, donc $y_{n+1} \leq z_{n+1}$. Puis, en utilisant de nouveau $y_n \geq 1$ (et donc $\quad \overline{y_n} \geq 1$),

$$z_{n+1} = \frac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n) \quad \overline{y_n}} \leq \frac{y_n + y_n z_n}{(1 + z_n) \quad \overline{y_n}} \leq \quad \overline{y_n} \leq y_n.$$

B. On en déduit, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq y_{n+1} - 1 \leq z_{n+1} - 1 \leq y_n - 1$$

D'où $\quad z_{n+1} - 1\ _K \quad \leq \quad y_n - 1\ _K \quad$. Comme la suite (y_n) converge uniformément vers 1 sur K (d'après le IV.1.1.) il en est de même de la suite (z_n).

IV.1.5. *A.* On a, pour tout $n \geq 1$, les égalités

$$v_{n+1} = u_{n+1} z_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)\frac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n) \quad \overline{y_n}}$$

Comme $z_n = v_n\ \ u_n$, il vient facilement $\ v_{n+1}\ \ v_n = \frac{1}{2}(1 + y_n z_n)\ \ (z_n \quad \overline{y_n})$. On a donc l'équivalance

$$x \quad]0\ \ 1[\quad v_{n+1}(x)\ \ v_n(x) \leq 1 \qquad 1 + y_n(x) z_n(x) \leq 2 z_n(x)\sqrt{y_n(x)} \tag{12}$$

Par ailleurs, un calcul simple montre l'équivalence

$$x \quad]0\ \ 1[\quad (\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leq \frac{z_n(x) - 1}{z_n(x)} \qquad 1 + y_n(x) z_n(x) \leq 2 z_n(x)\sqrt{y_n(x)}. \tag{13}$$

La comparaison des expressions (12) et (13) montre donc que l'implication demandée est vraie

$$x \quad]0\ \ 1[\quad (\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leq \frac{z_n(x) - 1}{z_n(x)} \qquad v_{n+1}(x)\ \ v_n(x) \leq 1.$$

B. Des inégalités $1 \leq \quad \overline{y_n} \leq y_n$ (vraie pour tout $n \geq 1$) et $y_n \leq z_n$ (vraie pour tout $n \geq 2$, *cf* IV.1.4.), il vient pour tout $n \geq 2$ la double inégalité

$$0 \leq \quad \overline{y_n} - 1 \leq z_n - 1 \tag{14}$$

C. Comme la suite (z_n) converge uniformément vers 1 sur K, la double inégalité précédente entraine la convergence uniforme de la suite $\overline{y_n}$ vers 1 sur K par valeurs supérieures, selon un raisonnement analogue à celui effectué en IV.1.4.. Il existe alors un entier $n_0 \geq 2$ tel que les inégalités suivantes soient satisafaites, pour tout $n \geq n_0$

$$x \quad K \qquad 1 \leq z_n(x) \leq 3 \;\; 2 \qquad 0 \leq \sqrt{y_n(x)} - 1 \leq 1 \;\; 2$$

Il en résulte, pour tout $x \quad K$ et tout $n \geq n_0$, l'inégalité $z_n(x)(\sqrt{y_n(x)} - 1) < 1$. On en déduit

$$x \quad K \qquad n \geq n_0 \quad z_n(x)(\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leq \sqrt{y_n(x)} - 1 \leq z_n(x) - 1$$

en raison de la double inégalité (14).

D. Les résultats du *A.* et du *C.* entrainent, pour tout $x \quad K$ et tout $n \geq n_0$, l'inégalité $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$. Comme d'après le IV.1.3., la suite de fonctions (u_n) est croissante et que $u_n \leq v_n$, on obtient finalement

$$x \quad K \qquad n \geq n_0 \qquad u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq v_{n+1}(x) \leq v_n(x).$$

E. Soit $x \quad K$. Comme selon *D.* la suite $(u_n(x))$ (*resp.* $(v_n(x))$) est croissante et majorée (*resp.* décroissante à partir d'un certain rang et minorée), les suites numériques $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont convergentes. Comme de plus la suite de fonctions (z_n) converge vers 1, les deux suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ convergent vers la même limite.
On en déduit la convergence simple (sur K) des suites de fonctions (u_n) et (v_n) vers une fonction w définie sur K. On a de plus (propriété des suites adjacentes)

$$x \quad K \qquad n \geq n_0 \qquad u_n(x) \leq w(x) \leq v_n(x).$$

En utilisant de nouveau *D.*, on obtient, pour tout $n \geq n_0$

$$x \quad K \qquad 0 \leq w(x) - u_n(x) \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)(z_n(x) - 1) \;\; z_n(x) \leq v_{n_0}(x)(z_n(x) - 1)$$

puisque la suite de fonctions v_n est décroissante sur K à partir du rang n_0 et que $z_n \geq 1$, pour tout $n \geq 1$. La fonction v_{n_0} étant continue (*cf* III.2.1.), elle est bornée sur K. On a donc

$$x \quad K \qquad 0 \leq w(x) - u_n(x) \leq \left\| v_{n_0} \right\|_K \quad (z_n(x) - 1)$$

Comme la suite de fonctions (z_n) converge vers 1, uniformément sur K, l'inégalité précédente entraine la convergence uniforme sur K de la suite de fonctions (u_n). On procède de façon analogue pour la suite (u_n) en remarquant que sur K et pour $n \geq n_0$ on a $0 \leq v_n - w \leq v_n - u_n$.

Remarques.

1. Selon le IV.1.3., la suite u_n est croissante et majorée et selon *D.* la suite v_n décroissante à partir d'un certain rang et minorée sur K : on en déduit la convergence simple sur K des deux suites de fonctions. Mais de plus, d'après le premier théorème de Dini, toute suite *monotone* de fonctions définies sur un *compact,* simplement convergente, est uniformément convergente. Ceci donne un argument sophistiqué et rapide pour conclure cette question.

2. Soit $[\alpha \;\; \beta]$ un intervalle non trivial inclus dans $]0 \;\; 1[$. Sur $[\alpha \;\; \beta]$, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f et les suites (u_n) et (v_n) convergent uniformément : la fonction f est donc de classe C^1 sur $[\alpha \;\; \beta]$ (résultat déja connu : *cf* II.2.2.). De plus les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f sur K, puisque selon le théorème utilisé $\lim_n \quad u_{n\ [\alpha\ \beta]} = (f_{\ [\alpha\ \beta]}) \;\; = f_{\ [\alpha\ \beta]}$. Par l'argument usuel, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f sur $]0 \;\; 1[$. C'est le seul résultat dont on a besoin dans la suite.

IV.2. Construction d'une suite (π_n) convergeant vers π

IV.2.1. On a, d'après le III.3.2., l'égalité $\pi = 2 \;\; \overline{2} f^3(1 \quad \overline{2}) \;\; f(1 \quad \overline{2})$. Selon les rappels et la remarque effectuée à la fin du IV.1.5., les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f et la suite (u_n) vers f sur l'intervalle $]0 \;\; 1[$. il en résulte en particulier

$$\pi = 2 \;\; \overline{2} \lim_n \;\; v_n^2(1 \quad \overline{2}) u_n(1 \quad \overline{2}) \;\; u_n(1 \quad \overline{2}).$$

IV.2.2. Posons pour cette seule question $s_n = v_n^2 u_n \;\; u_n$, pour tout entier $n \geq 1$. La suite $(2 \;\; \overline{2} s_n(1 \quad \overline{2}))$ converge vers π. Notons encore que $s_1(1 \quad \overline{2}) = (1 + \quad \overline{2}) \;\; 2$, puisque $u_1(x) = (1 + x) \;\; 2$, $u_1(x) = 1 \;\; 2$ et

$v_1(x) = \quad \overline{x}$.
Ecrivons, pour tout entier $n \geq 1$, $s_{n+1} = c_n s_n$ où c_n est une fonction à déterminer. On a

$$c_n = \frac{u_n}{v_n^2 u_n} \frac{v_{n+1}^2 u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{u_n v_n u_n (u_n + v_n)}{v_n^2 u_n (u_n + v_n)} = \frac{1 + u_n \ v_n}{1 + v_n \ u_n} = \frac{1 + y_n}{1 + z_n}.$$

On pose alors, pour $n \geq 0$, $\pi_n = 2 \ \overline{2} s_{n+1}(1 \quad \overline{2})$. On constate que $\pi_0 = 2 + \quad \overline{2}$, que la suite (π_n) converge vers π et qu'elle vérifie la relation de récurrence

$$n \geq 1 \qquad \pi_n = \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \pi_{n-1}.$$

IV.3. Rapidité de convergence de la suite (π_n)
IV.3.1. *A.* On a, pour tout $n \geq 1$, $y_{n+1} = (1 + y_n) \ (2 \quad \overline{y_n})$, selon le IV.1.2.. D'où la relation

$$y_{n+1} - 1 = (\quad \overline{y_n} - 1)^2 \ (2 \quad \overline{y_n})$$

Comme, pour tout $n \geq 1$, $y_n \geq 1$ (*cf* IV.1.1.), il suffit de comparer $(x-1)^2 \ (2x)$ et $(1 \ 8)(x^2-1)^2$ pour $x \geq 1$. Or, pour tout $x \geq 1$,

$$(x-1)^2 \ (2x) \leq (1 \ 8)(x^2-1)^2 \qquad 1 \ (2x) \leq (1 \ 8)(x+1)^2 \qquad 1 \leq (1 \ 4)(x+1)^2 \qquad 1 \leq x$$

(la première équivalence, d'ailleurs inutile, se vérifie par simplification pour $x > 1$ et par le calcul pour $x = 1$).
On en déduit de ce raisonnement et du IV.1.1. déja cité

$$0 \leq y_{n+1} - 1 \leq (1 \ 8)(y_n - 1)^2 \tag{15}$$

B. Le résultat étant donné, il est commode de faire une récurrence. Pour $n = 1$, on a, en utilisant l'inégalité (15), $y_2 - 1 \leq (1 \ 8)(y_1 - 1)^2$. Supposons donc, que pour $n \geq 1$, on ait

$$0 \leq y_{n+1} - 1 \leq (1 \ 8^{2^n - 1})(y_1 - 1)^{2^n}$$

On a alors, en utilisant de nouveau l'inégalité (15),

$$0 \leq y_{n+2} - 1 \leq (1 \ 8)(y_{n+1} - 1)^2 \leq (1 \ 8)(1 \ 8^{2^n - 1})^2 \left((y_1 - 1)^{2^n}\right)^2 = (1 \ 8^{2^{n+1} - 1})(y_1 - 1)^{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence.
C. On a, pour tout $x \quad]0 \ 1[, \ \ y_1(x) = (1 + x) \ (2 \quad \overline{x})$ et donc $\quad y_1(x) - 1 = (\quad \overline{x} - 1)^2 \ (2 \quad \overline{x})$. Pour $x_0 = 1 \quad \overline{2}$, on utilise l'inégalité $0 \ 707 \leq x_0$ (qui entraine $0 \ 84 \leq \quad \overline{x_0}$) pour obtenir le résultat demandé. En effet, on a les implications

$$0 \ 707 \leq x_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - \quad \overline{x_0})^2 \leq 16 \, 10^{-4} \\ 1 \ (2 \quad \overline{x_0}) \leq 1 \ 1 \ 68 \leq 10 \ 16 \end{array} \right\} \quad y_1(x_0) - 1 \leq 16 \, 10^{-3}$$

On en déduit que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq y_{n+1}(x_0) - 1 \leq (1 \ 8^{2^n - 1})(y_1(x_0) - 1)^{2^n} = 8 \left((y_1(x_0) - 1) \ 8\right)^{2^n} \leq 8 \left(2 \ 10^{-3}\right)^{2^n} = 8 \, (500)^{-2^n} \tag{16}$$

IV.3.2. *A.* On a, pour tout $x \quad]0 \ 1[, \ y_1(x) = (1 + x) \ (2 \quad \overline{x})$ et $z_1(x) = 1 \quad \overline{x}$. D'où $y_1(x) \leq z_1(x)$, pour tout $x \quad]0 \ 1[$. D'après le IV.1.4 on a, pour tout $n \geq 2$, l'inégalité $y_n \leq z_n$. D'où, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité $1 + y_n \leq 1 + z_n$ et d'après l'expression de π_n (*cf* IV.2.2.) l'inégalité $\pi_n \leq \pi_{n-1}$. On justifie ainsi la relation $\quad p \quad \mathbb{N} \ \ 0 \leq \pi_p - \pi_{p+1}$. La suite (z_p) est décroissante.
B. On a, en notant $1 \quad \overline{2} = x_0$

$$\pi_p - \pi_{p+1} = \pi_p \frac{z_{p+1}(x_0) - y_{p+1}(x_0)}{1 + z_{p+1}(x_0)} \leq \frac{\pi_p}{2} (z_{p+1}(x_0) - y_{p+1}(x_0)) \leq \frac{\pi_0}{2} (z_{p+1}(x_0) - y_{p+1}(x_0))$$

car d'une part $z_{p+1} \geq 1$, pour tout $p \geq 0$ (*cf* IV.1.3.), et d'autre part la suite (π_p) est décroissante. Comme, pour $p \geq 1$, on a $y_{p+1} \leq z_{p+1}$ (*cf* IV.1.4.), on obtient finalement

$$p \quad \mathbb{N} \ \ 0 \leq \pi_p - \pi_{p+1} \leq \frac{\pi_0}{2} (y_p(x_0) - y_{p+1}(x_0)) \tag{17}$$

C. Soit n un entier quelconque. La série de terme général $\mu_p = \pi_{p+n} - \pi_{p+1+n}$ (*resp.* $\nu_p = y_{p+n}(x_0) - y_{p+1+n}(x_0)$) est convergente, avec

$$\sum_{i=1}^{+} \mu_i = \sum_{i=1}^{+} (\pi_{n+i} - \pi_{n+1+i}) = \pi_{n+1} - \pi \quad (resp. \ \sum_{i=1}^{+} \nu_i = y_{n+1}(x_0) - 1),$$

puisque la suite (π_p) converge vers π (*resp.* $(y_p(x_0))$ converge vers 1). Avec la majoration (17) des termes généraux de ces séries, et l'inégalité (16), il vient

$$n \quad \mathbb{N} \qquad 0 \leq \pi_{n+1} - \pi \leq \frac{\pi_0}{2}(y_{n+1}(x_0) - 1) \leq 4\pi_0 \, (500)^{-2^n} \tag{18}$$

IV.3.3. Selon le IV.3.2., pour obtenir une erreur inférieure à 10^{-N}, il suffit de prendre un entier n tel que $4\pi_0 \, (500)^{-2^n} < 10^{-N}$. Or

$$4\pi_0 \, (500)^{-2^n} < 10^{-N} \qquad 2^n > \frac{1}{\operatorname{Log} 500}(N + \operatorname{Log}(4\pi_0)) \qquad n > \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} 500}(N + \operatorname{Log}(4\pi_0))\right)$$

Pour $N = 1000000$, on obtient $n \geq 19$

Remarque.- Il s'agit donc d'un algorithme dont la convergence est très rapide puisque *quadratique.* De plus, la valeur $h = 1 \ 500$, élevée à la puissance 2^n dans l'expression (18) est petite. Passer de n à $n + 1$ divise ainsi l'erreur commise pas 25000.